

## 数学Ⅱ・数学B

問 題	選 択 方 法
第1問	必 答
第2問	必 答
第3問	} いずれか2問を選択し、 解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] 座標平面上の3点

$$A(-1, 0), B(\cos \theta, \sin \theta), C(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

について、 $\theta$ が $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲を動くとき

$$d = AC + BC$$

の最大値と最小値を求めよう。

(1)

$$AC^2 = \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta$$

$$= \boxed{\text{イ}} \cos^2 \theta$$

$$BC^2 = \boxed{\text{ウ}} - 2\cos \theta$$

$$= \boxed{\text{エ}} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

であるから

$$d = \boxed{\text{オ}} |\cos \theta| + \boxed{\text{カ}} \sin \frac{\theta}{2}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2)  $t = \sin \frac{\theta}{2}$  とおく。

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  のとき

$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$  であり,  $d = -\text{ケ}t^2 + \text{コ}t + 2$  である。

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき

$\frac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}} \leq t \leq 1$  であり,  $d = \text{ケ}t^2 + \text{コ}t - 2$  である。

したがって,  $d$  は  $t = \frac{\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$  のとき最小値  $\sqrt{\text{ス}}$  をとり,

このときの  $\theta$  の値は  $\text{セソ}^\circ$  である。また,  $d$  は  $t = \text{タ}$  のとき  
最大値  $\text{チ}$  をとり, このときの  $\theta$  の値は  $\text{ツテト}^\circ$  である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

[2]  $x, y, z$ は正の数で  $2^x = \left(\frac{5}{2}\right)^y = 3^z$  を満たしているとする。このとき

$$a = 2x, \quad b = \frac{5}{2}y, \quad c = 3z$$

とおき、 $a, b, c$ の大小関係を調べよう。

(1)  $x = y(\log_2 \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}})$  であるから

$$b - a = y \left( \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2} - 2 \log_2 \boxed{\text{ナ}} \right)$$

である。したがって、 $a$ と $b$ を比べると  $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2)  $x = z \log_2 \boxed{\text{ノ}}$  であるから

$$c - a = z \left( 3 - 2 \log_2 \boxed{\text{ノ}} \right)$$

である。したがって、 $a$ と $c$ を比べると  $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3)  $3^5 < \left(\frac{5}{2}\right)^6$  であることを用いると、 $a, b, c$ の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フ}} < \boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

第2問 (必答問題) (配点 30)

$a$  を定数とし、放物線

$$y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$$

を  $C$ 、その頂点を  $P$  とする。

(1) 頂点  $P$  の座標は

$$\left( \boxed{\text{アイ}}, -a^{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}} a^2 \right)$$

である。したがって、どのような定数  $a$  についても、頂点  $P$  は

$$y = x^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}} x^2$$

のグラフ上にある。

(2)  $a$  が  $-3 \leq a < 1$  の範囲を動くとする。頂点  $P$  の  $y$  座標の値が最大となるのは  $a = \boxed{\text{キ}}$  と  $a = \boxed{\text{クケ}}$  のときであり、最小となるのは  $a = \boxed{\text{コサ}}$  のときである。

(3)  $a$  の値を(2)で求めた  $\boxed{\text{キ}}$ 、 $\boxed{\text{クケ}}$ 、 $\boxed{\text{コサ}}$  とするときの放物線  $C$  をそれぞれ  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  とする。放物線  $C_2$ 、 $C_3$  の方程式は

$$C_2: y = x^2 - \boxed{\text{シ}} x + \boxed{\text{ス}}$$

$$C_3: y = x^2 - \boxed{\text{セ}} x$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

このとき

$$C_1 \text{ と } C_2 \text{ の交点の } x \text{ 座標は } \frac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$$

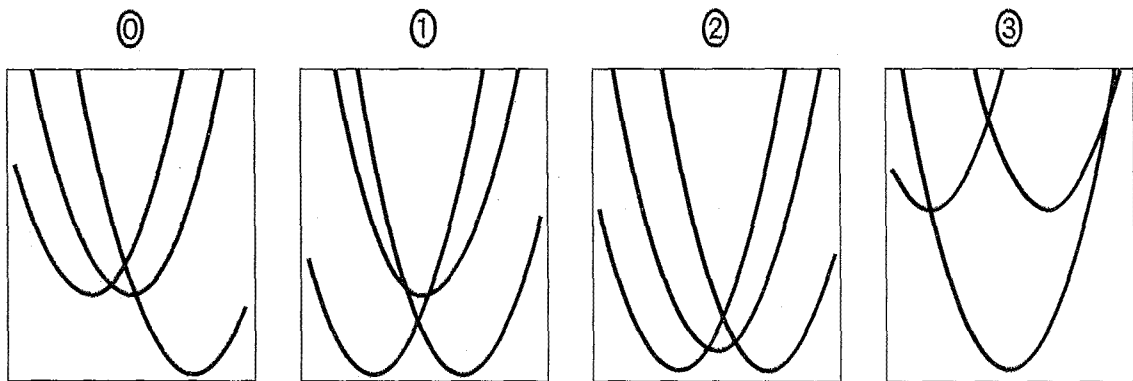
$$C_1 \text{ と } C_3 \text{ の交点の } x \text{ 座標は } \boxed{\text{タ}}$$

$$C_2 \text{ と } C_3 \text{ の交点の } x \text{ 座標は } \frac{\boxed{\text{チ}}}{2}$$

である。

- (4)  $C_1, C_2, C_3$  を座標平面上に図示したとき、それらの位置関係を表す最も適当なものは、下の図①～③のうち  $\boxed{\text{ツ}}$  である。ただし、座標軸や曲線名は省略してある。

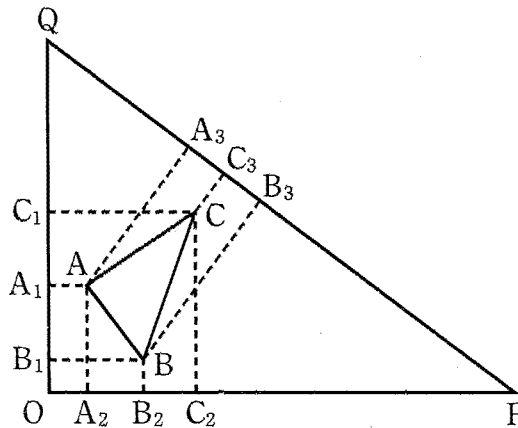
三つの放物線  $C_1, C_2, C_3$  で囲まれた図形の面積は  $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$  である。



第3問 (選択問題) (配点 20)

座標平面上の3点  $O(0, 0)$ ,  $P(4, 0)$ ,  $Q(0, 3)$  を頂点とする三角形  $OPQ$  の内部に三角形  $ABC$  があるとする。  $A, B, C$  から直線  $OQ$  に引いた垂線と  $OQ$  との交点をそれぞれ  $A_1, B_1, C_1$  とする。  $A, B, C$  から直線  $OP$  に引いた垂線と  $OP$  との交点をそれぞれ  $A_2, B_2, C_2$  とする。  $A, B, C$  から直線  $PQ$  に引いた垂線と  $PQ$  との交点をそれぞれ  $A_3, B_3, C_3$  とする。

$A_1$  が線分  $B_1C_1$  の中点であり、  $B_2$  が線分  $A_2C_2$  の中点であり、  $C_3$  が線分  $A_3B_3$  の中点であるとする。



(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

$\vec{AB} = (x, y)$ ,  $\vec{AC} = (z, w)$ とおく。A<sub>1</sub>が線分B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>の中点であるから  $w = \boxed{\text{ア}}$   $y$ である。B<sub>2</sub>が線分A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>の中点であるから  $z = \boxed{\text{イ}}$   $x$ である。線分ABの中点をDとすると、C<sub>3</sub>が線分A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>の中点であるから

$$\vec{CD} \cdot \vec{PQ} = \boxed{\text{ウ}}$$

である。また

$$\vec{PQ} = \left( \boxed{\text{エオ}}, \boxed{\text{カ}} \right), \quad \vec{CD} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} (\vec{AB} - \boxed{\text{ケ}} \vec{AC})$$

であるから

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} x$$

である。したがって

$$\vec{AB} = x \left( 1, \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right), \quad \vec{AC} = x \left( \boxed{\text{イ}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)$$

である。ゆえに

$$AC = \frac{\boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} AB, \quad \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。



第4問 (選択問題) (配点 20)

二つの複素数  $p, q$  と三つの異なる複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  は

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\alpha\beta\gamma = q \quad \dots\dots\dots ③$$

を満たすとする。複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  が複素数平面上で表す点をそれぞれ A, B, C とし、三角形 ABC は、 $AB = AC$  の直角二等辺三角形であるとする。

このとき

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \boxed{\text{アイ}}^\circ, \quad \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = \boxed{\text{ウ}}$$

である。ここで、複素数  $z$  の偏角  $\arg z$  は  $-180^\circ \leq \arg z < 180^\circ$  を満たすとする。

以下  $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \boxed{\text{アイ}}^\circ$  であるとする。このとき、①を用いると

$$\beta = \frac{\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}}i}{\boxed{\text{キ}}} \alpha, \quad \gamma = \frac{\boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}}i}{\boxed{\text{サ}}} \alpha$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

さらに, ②, ③から

$$p = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \alpha^{\boxed{\text{セ}}}, \quad q = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \alpha^{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって,  $p$  と  $q$  は

$$\boxed{\text{ツテ}} p^{\boxed{\text{ト}}} = \boxed{\text{ナニ}} q^{\boxed{\text{ヌ}}}$$

を満たさなければならない。

さらに, 複素数平面上に点  $D$  があり, 四角形  $ABDC$  が正方形であるとき,  $D$  を表す複素数は  $\boxed{\text{ネノ}} \alpha$  である。

第5問 (選択問題) (配点 20)

さいころを最大5回まで投げ、目の出方に応じてポイントを得る次のゲームをDさんがおこなう。Dさんは最初 $a$ ポイントをもっている。

さいころを投げて、5または6の目が出る事象を $A$ とする。事象 $A$ が初めて起こった時点では1ポイントを得て引き続きゲームを続行し、2度目に事象 $A$ が起これば2ポイントが加算されて合計3ポイントを得て、その時点でゲームを終了する。なお、さいころを5回投げても、事象 $A$ が一度しか起こらない場合には、1度目に得た1ポイントのままで終了する。もし5回投げても事象 $A$ が一度も起こらない場合には、あらかじめ定めた $m$ ポイントが減点されて終了する。ただし、 $a$ と $m$ は自然数で、 $a \geq m$ とする。

このゲームが終了した時点でのDさんのもつポイント数を確率変数 $X$ とする。

(1)  $X = a + 1$ となる確率は  $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{243}$  である。

(2) ちょうど4回目でゲームが終了する確率は  $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$  であり、終了する時点

が4回目または5回目となる確率は  $\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$  である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(3) 3回目までに一度も事象Aが起こらない確率は  $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$  である。

また、3回目までに一度も事象Aが起こらないとき、 $X > a$ となる条件付き確率は  $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$  である。

(4) 確率変数  $X$  の平均(期待値)は

$$E(X) = a + \frac{\boxed{\text{ソタチ}} - \boxed{\text{ツテ}} m}{243}$$

で、 $E(X) > a$ となるような最大の自然数  $m$  は  $\boxed{\text{トナ}}$  である。

第6問 (選択問題) (配点 20)

ある銀行では毎期末に預金残高に対し5%の利率で利息がつく。この銀行に、たとえば $a$ 万円を一期間預金すると、期末には $1.05 \times a$ 万円の預金残高になることになる。

第1期の初めに、Aさんはこの銀行に $b$ 万円の預金を持っている。Aさんは、まず $b$ 万円から第1期分 $m$ 万円を引き出す。残りの預金に対し第1期末に5%の利息がつく。ここで、 $b > m$ とする。第2期目からも每期初めにこの預金から $m$ 万円ずつを引き出す予定である。ただし、預金残高が $m$ 万円に満たないときには、その全額を引き出すものとする。

以下の問題中、 $\text{INT}(X)$ は $X$ を越えない最大の整数を表す関数である。

- (1) 預金残高が0円になるのに何期間を要するかを調べるため、次の〔プログラム1〕を作った。このプログラムでは、自然数 $b$ と $m$ を与えるとき、第 $n$ 期初めに預金を引き出した直後に預金残高が0円になれば、そのときの自然数 $n$ を出力する。

〔プログラム1〕

```

100 INPUT "B=";B
110 INPUT "M=";M
120 N=0
130 N=N+1
140 B=1.05*(B-M)
150 IF B>0 THEN GOTO アイウ
160 PRINT N
170 END
    
```

このプログラムの空欄「アイウ」をうめて、プログラムを完成せよ。

- (2) このプログラムの160行を変更して、最終期の引き出し金額の1万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには、160行を「エ」と変更すればよい。ただし、この金額の単位は万円とする。また、「エ」については、当てはまるものを、次の①～⑤から一つ選べ。

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| ① PRINT N, INT(B)      | ④ PRINT N, INT(B/1.05+M) |
| ② PRINT N, INT(B-M)    | ⑤ PRINT N, INT(B/1.05-M) |
| ③ PRINT N, INT(1.05*B) |                          |

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

- (3) 第1期初めの預金額を2150万円、引き出し額を100万円とすると、第1期末の預金残高は、約2152万円となり、第1期初めの2150万円より増える。

一般に、毎期の初めに $m$ 万円引き出すものとし、第 $n$ 期末の預金残高を $c_n$ 万円とする。このとき、 $c_{n+1} = 1.05(c_n - m)$ であるので

$$c_{n+1} - c_n = 1.05(c_n - c_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つ。ただし、 $c_0 = 2150$ とする。

よって、 $c_1 - c_0 \geq 0$ ならば、預金残高は減少しないことがわかる。ここで、 $c_1$ は $m$ と $c_0$ によって決まり、 $c_1 - c_0 \geq 0$ を満たす最大の自然数 $m$ は **オカキ** である。

- (4) 次に、Aさんの預金残高が $n$ 期間にわたり0円にならないために必要な第1期初めの預金額 $b$ 万円を計算するため、次の〔プログラム2〕を作った。このプログラムでは、自然数 $n$ と $m$ を与えるとき、預金残高が $n$ 期間にわたり0円にならないために必要な第1期初めの預金額 $b$ 万円を計算する。ただし、 $n \geq 2$ とする。

〔プログラム2〕

```

100 INPUT "N=";N
110 INPUT "M=";M
120 I=N
130 B=M
140 B=B/1.05+M
150 I=I-1
160 IF I>1 THEN GOTO クケコ
170 PRINT サ
180 END
    
```

このプログラムの空欄 **クケコ** と **サ** をうめて、このプログラムを完成せよ。ただし、**サ** については、当てはまるものを、次の①~④から一つ選べ。

- ① INT(B)                      ② INT(B/1.05)                      ③ INT(B/1.05+1)  
 ④ INT(B+1)                      ⑤ INT((B+1)/1.05)

このプログラムを実行して $N=?$ に対し3、 $M=?$ に対し90を入力したとき、170行において **シスセ** と出力される。このとき、140行は **ソ** 回実行される。