第　1　問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P，Q，R が次の条件をみたしている。

△PQR は一辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，a の値を求めよ。

第　2　問

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば，b は 0 または 4 であることを示せ。

(2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数，100 の位の数，10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

第　3　問

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

第　4　問

関数$f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x$$
$$f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)$$
$$f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に，$n \geqq 3$ に対して関数$f_n(x)$が定まったならば，関数$f_{n+1}(x)$を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$f_1(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

(2)　a を実数とする。$f_2(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

(3)　n を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ をみたす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

第　5　問

r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 O$(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球を A，点 P$(r,0,0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし，球 A と球 B の和集合とは，球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1)　V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ。

(2)　$V=8$ となるとき，r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

注意：円周率 π は　$3.14 < \pi < 3.15$　をみたす。

第　6　問

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が3枚ある。この3枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が1，2であれば左端の板を裏返し，3，4であればまん中の板を裏返し，5，6であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1回目の操作で出たさいころの目が1であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。

◇M4(536—64)