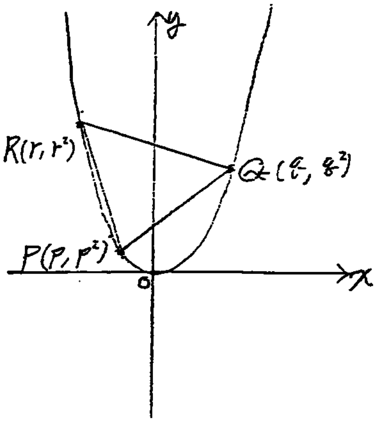
東京大（前期）【数学(B)】解答例

第１問



$P(p, p^2)$ $Q(q, q^2)$ とおく。$(p<q)$

PQの傾き$=\sqrt{2}$より

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=p+q=\sqrt{2} \quad \cdot\cdot ①$$

$PQ^2=a^2$より

$$(q-p)^2(1+(q+p)^2)=3(q-p)^2=a^2 \quad (\because ①)$$

$$\therefore \quad q-p=\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \cdot\cdot ②$$

①, ②より

$$2p=\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \cdot\cdot ③$$

$R(r, r^2)$とおくと

$$\overrightarrow{PQ}=(q-p)(1,(q+p))=\frac{a}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{PR}=(r-p, r^2-p^2)=(r-p)(1, r+p).$$

$\overrightarrow{PQ}$をPを中心に$+60°$回転させたものが$\overrightarrow{PR}$なので,

$$\frac{a}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2}i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(r-p)(1+(r+p)i)$$

$$\longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}a\left(1-\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}i\right)=(r-p)(1+(r+p)i)$$

$$\therefore \quad r-p=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}a \qquad r+p=-\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}$$

$$2p=-\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}a=\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{3}} \quad (\because ③)$$

$$\therefore \quad \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}a=\frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5}$$

$$a=\frac{18}{5}$$

第2問

(1) 平方数の元の数を n とする。

n の1の位の数を p，10の位の数を q とすると，

n^2 の10の位以下は $20pq+p^2$ の10の位以下である。

$20pq$ は10の位の数が偶数となるので，

($a+b$ が偶数) $\Longleftrightarrow$ (p^2 の10の位と1の位の数の和が偶数)

$\Longleftrightarrow$ p^2 は 0, 4, 64 のいずれか。

よって b は 0 または 4 ■

(2) n^2 の10の位の数と1の位の数が同じならば

(1)より b は 0 または 4

M, N を自然数として

(i) $b=0$ のとき。

$n^2=10000M$ となり，$p=q=0$ のとき題意を満たす。

(ii) $b=4$ のとき。

$n^2=10000M+4444$ でこのとき $p=2, 8$。

i) $p=2$ のとき

$n^2=(10N+2)^2=4(5N+1)^2$

$\therefore (5N+1)^2=2500M+1111$ となり，

平方数の10の位と1の位の数の和が偶数で，

1の位が1となり，(1)より不適。

ii) $p=8$ のとき

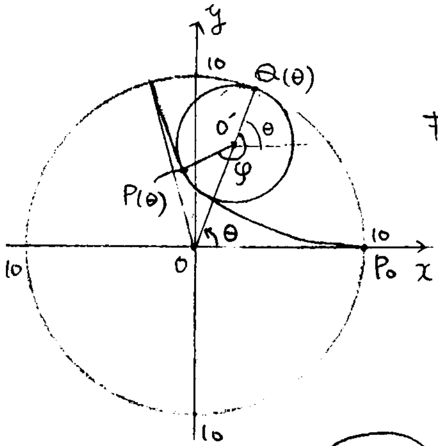
$n^2=(10N+8)^2=4(5N+4)^2$

$\therefore (5N+4)^2=2500M+1111$ となり，

i)と同様に不適。

■

第3問

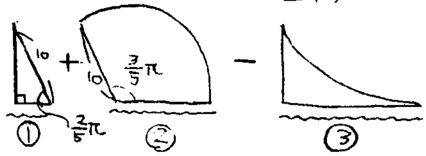


Pが最初に(10,0)にあり、円板Dの中心O′がθ回転したときのPの位置をP(θ), 円板Dと円Cの接点をQ(θ)とする. $\overset{\frown}{P_0Q(\theta)}=\overset{\frown}{P(\theta)Q(\theta)}$ より $\varphi=\frac{10}{3}\theta$

$$\therefore \overrightarrow{OP(\theta)} = 7\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\cos(\varphi-\theta)\\ \sin(\varphi-\theta)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}7\cos\theta+3\cos\frac{7}{3}\theta\\ 7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(\theta)\\ y(\theta)\end{pmatrix}$$

2つの図形のうち小さい方の面積をS_1とすると、

$S_1 =$ 

① … $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cos\frac{2}{5}\pi\cdot\sin\frac{2}{5}\pi = 25\sin\frac{4}{5}\pi = 25\sin\frac{\pi}{5}$

② … $\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{3}{5}\pi = 30\pi$

③ … $\int_{10\cos\frac{3}{5}\pi}^{10} y(\theta)\,dx(\theta) = \int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$

$$= 7\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(7\sin^2\theta+4\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta-3\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$= 7\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left\{7\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}-4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10}{3}\theta-\cos\frac{4}{3}\theta\right)-3\cdot\frac{1-\cos\frac{14}{3}\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$= \left[14\theta-\frac{49}{4}\sin2\theta-\frac{21}{5}\sin\frac{10}{3}\theta+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{3}\theta+\frac{9}{4}\sin\frac{14}{3}\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$= \frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}$$

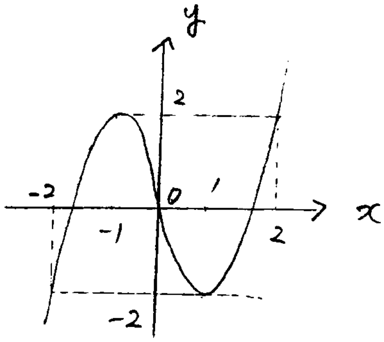
$\therefore\ S_1 = 25\sin\frac{\pi}{5}+30\pi-\left(\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{108}{5}\pi$

もう一方は　$10^2\pi-\frac{108}{5}\pi=\frac{392}{5}\pi$

第4問

(1) $f_1'(x) = 3(x^2-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



右上図より　$|a|>2$ で　1コ

$|a|=2$ で　2コ

$|a|<2$ で　3コ

(2) (1)より　$|f_1(x)|>2$ のとき　x は　1コ

$|f_1(x)|=2$ のとき　x は　2コ

$|f_1(x)|<2$ のとき　x は　3コ　　となる

(i) $|a|>2$ のとき　$f_2(x)=a$ を満たす　$f_1(x)=\alpha$ は　$|\alpha|>2$ でただ1つ存在し．$f_1(x)=\alpha$ $(|\alpha|>2)$ を満たす x は 1コ だけ

(ii) $a=2$ のとき　$f_1(x)=-1, 2$ となり　x は．

$f_1(x)=-1$ のとき 3コ．$f_1(x)=2$ のとき 2コ 存在するので　5コ

(iii) $|a|<2$ のとき　$f_2(x)=a$ を満たす $f_1(x)$ は．$0<|f_1(x)|<1$，$1<|f_1(x)|<2$ に 3コ存在し．それぞれの $f_1(x)$ につき．x は 3コ 存在するので　$3\times 3=$ 9コ

(3) $f_k(x)=\alpha$ ($|\alpha|<1$, $1<|\alpha|<2$) のとき (1)の図より

これを満たす $f_{k-1}(x)$ は $-2<f_{k-1}(x)<-1$, $-1<f_{k-1}(x)<1$,

$1<f_{k-1}(x)<2$ に1つずつ存在する。

したがって $f_n(x)=0$ を満たす $f_{n-1}(x)$ は $-2<f_{n-1}(x)<-1$,

$-1<f_{n-1}(x)<1$, $1<f_{n-1}(x)<2$ に1つ存在し、各 $f_{n-1}(x)$ につき

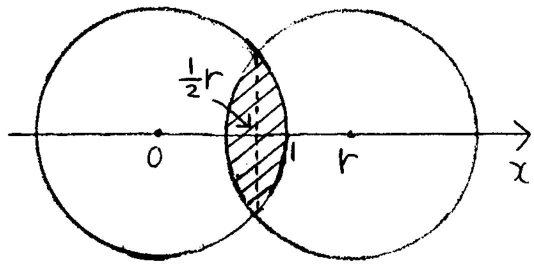
同様に考えるということを繰り返していくと $f_n(x)=0$ の解は

3^n コとなる。

第5問

(1)・$0<r<2$ のとき

2つの球の体積の和から右の断面図の斜線部に相当する部分の体積を引けばよい。



$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\times 2-2\times\int_{\frac{1}{2}r}^{1}(1-x^2)\pi\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi-2\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}r}^{1}=\left(-\frac{1}{12}r^3+r+\frac{4}{3}\right)\pi$$

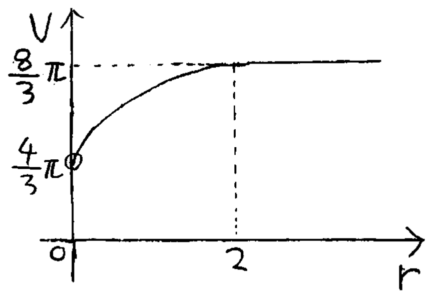
・$r\geqq 2$ のとき

2つの球は重ならないので $V=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\times 2=\frac{8}{3}\pi$

$0<r<2$ のとき $\frac{dV}{dr}=\left(-\frac{1}{4}r^2+1\right)\pi=-\frac{1}{4}\pi(r-2)(r+2)$

より V は単調増加する。

$$V=\begin{cases}\left(-\frac{1}{12}r^3+r+\frac{4}{3}\right)\pi & (0<r<2)\\ \frac{8}{3}\pi & (r\geqq 2)\end{cases}$$



(2) $\frac{8}{3}\pi>\frac{8}{3}\cdot 3.14>8$、$\frac{4}{3}\pi<\frac{4}{3}\cdot 3.15<8$ とグラフより

$V=8$ となる r が $0<r<2$ の範囲にただ1つ存在する。

$r=1.5$ のとき　$V=\frac{245}{96}\pi>\frac{245}{96}\cdot 3.14=8.01\cdots$

$r=1.45$ のとき $V=\dfrac{80937}{32000}\pi<\dfrac{80937}{32000}\cdot 3.15=7.96\cdots$

$7.96\cdots<8<8.01\cdots$ であり、V は単調増加なので

$V=8$ となる r は $1.45<r<1.5$ を満たす。よってその値

を四捨五入すると 1.5 となる。

第6問

1回の操作で，左，中，右の板を裏返す確率はすべて $\frac{1}{3}$ である。

(1) 題意を満たすのは（左3回），（左1回，中2回），（左1回，右2回）のいずれかである。よって求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \underline{\frac{7}{27}} \;//$$

(2) n 回の操作の結果，「白＊黒」または「黒＊白」になる確率を q_n とおくと（＊は白でも黒でもよいことを表している）

$$q_{n+1} = q_n \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{中}} + \underbrace{(1-q_n)}_{(\text{白＊白})\text{or}(\text{黒＊黒})} \times \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{左or右}}, \quad q_0 = 0$$

$$\therefore\ q_{n+1} = -\frac{1}{3}q_n + \frac{2}{3} \iff q_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(q_n - \frac{1}{2}\right) \text{ より}$$

$$q_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(q_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

また，n 回の操作の結果，「白＊白」となる確率を p_n とおくと，

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times \frac{1}{3} \quad \left[\begin{array}{l}\text{「白＊黒」ならば右を，}\\ \text{「黒＊白」ならば左を裏返す}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad p_0 = 1$$

$$\iff p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

両辺を $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ で割り，$r_n = \dfrac{p_n - \frac{1}{4}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$ とおくと

$$r_{n+1} = -r_n + \frac{1}{2} \iff r_{n+1} - \frac{1}{4} = -\left(r_n - \frac{1}{4}\right)$$

$r_0 = \frac{3}{4}$ より $r_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-1)^n \quad \therefore\ p_n = \underline{\frac{1}{4}\left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}} \;//$