第　1　問

$x > 0$ に対し $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1)　$n = 1, 2, \ldots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)　$h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。

◇M4(197—56)

第　2　問

$|z| > \dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，

$$T = \left\{ w \;\middle|\; w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leqq \frac{5}{4} \right\}$$

とする。このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

第　3　問

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$$

とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x>\frac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,\ldots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。$x_0>\frac{1}{2}$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

であることを示せ。

第　4　問

3 以上 9999 以下の奇数 a で，$a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

第　5　問

N を1以上の整数とする。数字 $1, 2, \ldots, N$ が書かれたカードを1枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

(i) 甲が1枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

(ii) 甲はもう1回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は，$b = 0$ とする。
$a + b > N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii) $a + b \leqq N$ の場合は，乙が1枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。$a + b < c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv) $a + b \geqq c$ の場合は，乙はもう1回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。$a + b < c + d \leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が2回目にカードをひかないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が2回目にカードをひくことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする。

第　6　問

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leqq r^2$$
$$y^2 + z^2 \geqq r^2$$
$$z^2 + x^2 \leqq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。