東京大（前期）【数学(B)】解答例

第1問

(1) 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ の時

$$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$$ であるので題意を満たす。

(ii) $n=k$ の時題意を満たすと仮定した時，$n=k+1$ でも題意を満たすことを示す。

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{a_k + b_k \log x}{x^{k+1}}\right)'$$

$$= \frac{\{b_k-(k+1)a_k\} - (k+1)b_k \log x}{x^{k+2}}$$

となるのでやはり題意を満たす。

以上 (i) (ii) から数学的帰納法によって題意は示され，a_n，b_n の漸化式は

$$\begin{cases} a_1 = 1,\quad b_1 = -1 \\ a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n \quad \text{—①} \quad (n=1,2,\cdots) \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n \quad \text{—②} \end{cases}$$

となる。

(2) $b_1=-1$ であることと ② をくり返して用いることで

$$b_n = (-1)^{n-1} \times n! \times (-1) = (-1)^n \times n!$$ を得る。

① に代入して $a_{n+1} = (-1)^n \times n! - (n+1)a_n$

両辺 $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ をかけて整理すると

$$(-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{a_n}{n!} - \frac{1}{n+1}$$

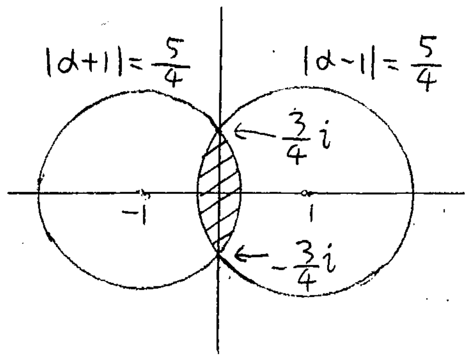
$$\Longleftrightarrow (-1)^n \frac{a_n}{n!} = (-1)^1 \frac{a_1}{1!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -h_n \quad (\because a_1 = 1)$$

よって $a_n = (-1)^{n+1} \times n! \times h_n$

第2問

$w = z^2 - 2z \iff w+1 = z^2-2z+1 = (z-1)^2$

aを複素数とする。このとき方程式 $x^2=a$ は2つの異なる解（ただし $a=0$ のときは $x=0$ が重解となる。）を持ち、その一方をαとすれば、もう一方は $-\alpha$ と表せる。よって $(z-1)^2 = w+1$ の解は $z=1\pm\alpha$ と表せ、$\alpha^2 = w+1$ を満たしている。



$|z| \leqq \frac{5}{4}$ より $|1\pm\alpha| \leqq \frac{5}{4}$、つまり

「$|\alpha+1|\leqq\frac{5}{4}$ かつ $|\alpha-1|\leqq \frac{5}{4}$」

が成り立たなければならないが、これを満たすαの存在範囲は右図の斜線部である。

ここで $w=\alpha^2-1=(\alpha+1)(\alpha-1)$ より、

$$|w| = |\alpha+1|\cdot|\alpha-1| \leqq \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{16}$$

等号が成り立つのは「$|\alpha+1|=\frac{5}{4}$ かつ $|\alpha-1|=\frac{5}{4}$」のときで、このとき $|w|$ は最大となる。これを満たすαは図より $\alpha=\pm\frac{3}{4}i$ のときであり、このとき $w=\alpha^2-1=-\frac{25}{16}$ である。

第3問

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$

$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}+\frac{1}{2}x\{-2e^{-2(x-1)}\}$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}$ …①

$f''(x)=-e^{-2(x-1)}-2\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}$

$=2(x-1)e^{-2(x-1)}$

ここで $f''(x)=0$ のとき、$x=1$ である。

よって $f'(x)$ の増減表は右図のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	…	1	…
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗

①より $x>\frac{1}{2}$ のとき、$f'(x)<\frac{1}{2}$

以上より $x>\frac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$ ▨

(2) (i) $x_0=1$ のとき、$f(1)=1$ より

常に $x_n=1$ なので $\lim_{n\to\infty}x_n=1$

(ii) $\frac{1}{2}<x_0<1$, $1<x_0$ のとき

(1)より $x>\frac{1}{2}$ で $f(x)$ は単調増加であるから、

$f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+e}{4}>\frac{1}{2}$ $\therefore x_n>\frac{1}{2}$

また $x\neq1$ のとき $f(x)\neq f(1)=1$, よって $x_n\neq1$

$|x_{n+1}-1|=|f(x_n)-f(1)|$ …② であり、

平均値の定理より ②$=|f'(c)(x_n-1)|$

となる c が 1 と x_n の間に存在するから

$|x_{n+1}-1|=|f'(c)||x_n-1|<\frac{1}{2}|x_n-1|$ ($\because$ (1)より)

$\therefore 0<|x_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1|$

$n\to\infty$ のとき、$\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1|\to0$ なので

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=1$$ ▨

第4問

m を自然数とすると

$$a^2 - a = 10^4 \times m$$

$\Leftrightarrow a(a-1) = 2^4 \cdot 5^4 \cdot m$ とおける.

a は奇数で、a と $a-1$ は互いに素、$a \leqq 9999$ より、

$a = 5^4 \cdot n$ （n は奇数で $1 \leqq n \leqq 15$）とおける.

このとき $a - 1 = 5^4 \cdot n - 1$

$$= (2^4 \cdot 39 + 1)n - 1$$

$$= 2^4 \cdot 39n + n - 1$$

$a-1$ は 2^4 の倍数なので、$n-1$ が 16 の倍数となることが必要であるが $1 \leqq n \leqq 15$ より

$n = 1$ のみが適する.

$\therefore\ a = \underline{625}$

第5問

(1) 甲の勝ちとなるのは，(c, d) が次の2条件を満たすとき。

$$\begin{cases} c \leqq a \\ c+d \leqq a \text{ または } N < c+d \iff d \leqq a-c \text{ または } N-c < d \end{cases}$$

これを満たす d は 各 $c\,(=1, 2, \cdots, a)$ に対し $a-c+N-(N-c)=a$ 個あるから，(c, d) は a^2 組ある。 よって，甲の勝つ確率は $\dfrac{a^2}{N^2}$ //

(2) 甲の勝ちとなるのは，(b, c, d) が次の3条件を満たすとき。

$$\begin{cases} a+b \leqq N \iff b \leqq N-a \\ c \leqq a+b \\ c+d \leqq a+b \text{ または } N < c+d \end{cases}$$

$$\iff d \leqq a+b-c, \text{ または } N-c < d$$

これを満たす d は 各 $b\,(=1, 2, \cdots, N-a)$，$c\,(=1, 2, \cdots, a+b)$ に対し $a+b-c+N-(N-c)=a+b$ 個あるから，(c, d) の組は各 b に対し $(a+b)^2$ 個存在する。 よって，(b, c, d) の組は

$$\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2 = \sum_{k=a+1}^{N} k^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 - \sum_{k=1}^{a} k^2$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6} \text{(組)}$$

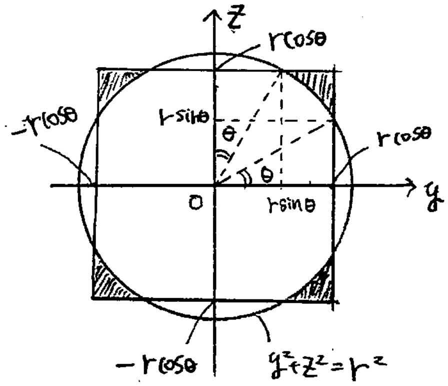
ある。よって，甲の勝つ確率は

$$\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}$$ //

第6問

yz 平面における対称性より $x \geqq 0$ で考える.
$z^2+x^2 \leqq r^2$ より $0 \leqq x \leqq r$ となるので
立体を $x = r\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ で切ったときの断面図を考える.

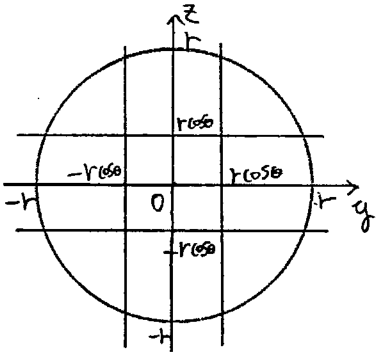
(i) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき



$y^2 \leqq r^2\cos^2\theta$, $z^2 \leqq r^2\cos^2\theta$, $y^2+z^2 \geqq r^2$ より
断面図は左図の斜線部で, その面積を
$S(\theta)$ とおくと.

$$S(\theta) = 4\left\{r(\cos\theta - \sin\theta) \times r\cos\theta - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right\}$$
$$= r^2\left\{4(\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta) - (\pi - 4\theta)\right\}$$

(ii) $\frac{\pi}{4} < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき.



左図より
$y^2 \leqq r^2\cos^2\theta$, $z^2 \leqq r^2\cos^2\theta$, $y^2+z^2 \geqq r^2$
を満たすものはない.

以上より

$$V = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S(\theta)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(\theta)\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\cdot d\theta$$
$$= 2r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{4\cos^3\theta - 4\cos^2\theta\sin\theta - (\pi - 4\theta)\cos\theta\right\}d\theta$$

ここで.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 3\theta + 3\cos\theta)\, d\theta = \left[\frac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \left[-\frac{4\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi - 4\theta)\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi - 4\theta)(\sin\theta)'\, d\theta$$

$$= \left[(\pi - 4\theta)\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta = 4 - 2\sqrt{2}$$

となるので.

$$V = 2r^3\left\{\frac{5}{3}\sqrt{2} - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) - (4 - 2\sqrt{2})\right\}$$

$$= \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3}\right) r^3$$